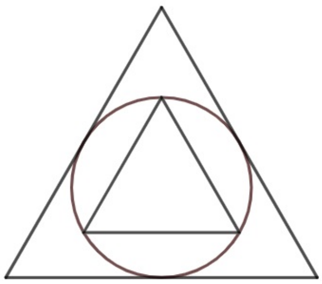
Bemerkung: Wir haben bei Aufgabe 5 die Aufgabenstellung korrigiert, da die dort abgebildete Figur keine Raute, sondern ein Drachenviereck ist. Bei einigen weiteren Aufgaben haben wir im Nachhinein kleinere sprachliche Anpassungen zur Erhöhung der Klarheit vorgenommen.

Aufgabe **1** (20 Punkte, 2×)



In der Abbildung sind zwei gleichseitige Dreiecke abgebildet, bei denen der Inkreis des großen Dreiecks mit dem Umkreis des kleineren Dreiecks identisch ist.

Wenn das kleinere Dreieck den Flächeninhalt 1 hat, wie groß ist dann der Flächeninhalt des größeren Dreiecks?

4

Ausarbeitung Aufgabe **1**

In einem gleichseitigen Dreieck fallen die Berührungspunkte des Inkreises mit den Mittelpunkten der Seiten zusammen. Der Inkreis des großen Dreiecks ist also auch der Umkreis des Dreiecks, das aus den Mittelpunkten der Seiten gebildet wird. Das kleine Dreieck aus der Aufgabenstellung ist also kongruent zu diesem Dreieck. Da die Verbindungsstrecken der Mittelpunkten der Seiten ein gleichseitiges Dreieck in vier gleiche Dreiecke aufteilen, ist das Verhältnis der beiden Flächen 4:1.

4

Aufgabe **2** (20 Punkte, 2×)

Wie viele vierstellige (natürliche) Dezimalzahlen gibt es, deren Summe ihrer vier Ziffern 14 und deren Produkt ihrer vier Ziffern 36 ist?

18

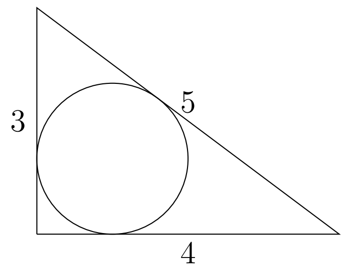
Ausarbeitung Aufgabe **2**

Die einzigen beiden Möglichkeiten, (ohne Beachtung der Reihenfolge) vier Ziffern mit der Summe 14 und dem Produkt 36 zu bilden, sind $1, 1, 6, 6$ und $1, 2, 2, 9$. Diese Ziffern können in den vierstelligen Dezimalzahlen in beliebiger Reihenfolge vorkommen. Es gibt im ersten Fall $\binom{4}{2} = 6$ Möglichkeiten und im zweiten Fall $\binom{4}{2} \cdot 2 = 12$ Möglichkeiten der Anordnung. Insgesamt erhalten wir $6 + 12 = 18$ vierstellige Dezimalzahlen mit den geforderten Eigenschaften.

18

Aufgabe 3 (20 Punkte, 2x)

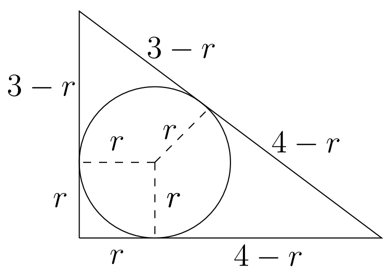
Wie groß ist der Flächeninhalt des Inkreises eines rechtwinkligen Dreiecks mit den Längen 3, 4 *und* 5*?*



π

Ausarbeitung Aufgabe 3

Man zeichnet vom Mittelpunkt des Inkreises die Lote mit der Länge des Radius r auf die Dreiecksseiten und erhält an jeder Ecke jeweils zwei kongruente Dreiecke. Es ergibt sich folgendes Bild:



Wir sehen, dass dann $5 = (3 - r) + (4 - r)$ gilt, also $r = 1$. Somit ist die Fläche des Kreises genau π.

π

Aufgabe 4 (30 Punkte, 2x)

Wir nehmen an, es befinden sich 100 (numerierte) Lampen in einer Reihe, beispielsweise 100 Laternen in einer Straße. Zu Beginn sind 100 Lampen ausgeschaltet und wir schalten sie alle ein. Dann schalten wir jede zweite aus. Dann schalten wir jede dritte um. Wir fahren so fort: Im n-ten Schritt schalten wir alle Lampen um, deren Nummer ein Vielfaches von n ist, bis wir im letzten (hundertsten) Schritt nur die hundertste Lampe umschalten.

Wie viele Lampen sind am Ende eingeschaltet?

10

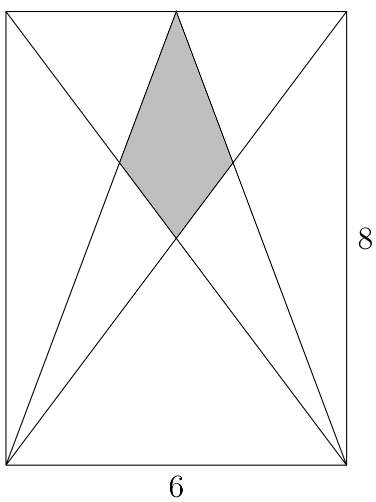
Ausarbeitung Aufgabe 4

Im k-ten Schritt schalten wir alle Lampen um, deren Nummern Vielfache von k sind. Am Ende sind nur die Lampen eingeschaltet, die wir ungerade oft umgeschaltet haben, also die Lampen, deren Zahl eine ungerade Anzahl von Teilern (einschließlich 1) hat. Nun ist für jeden Teiler m von n auch $\frac{n}{m}$ ein Teiler von n. Teiler kommen also paarweise vor, es sei denn, es gibt einen Teiler m, für den $\frac{n}{m} = m$, also $n = m^2$ gilt. Daher hat n eine gerade Anzahl von Teilern, wenn n keine Quadratzahl ist, und eine ungerade Anzahl von Teilern, wenn n eine Quadratzahl ist. Es gibt 10 Quadratzahlen zwischen 1 und 100, also sind am Ende 10 Lampen eingeschaltet.

10

Aufgabe 5 (20 Punkte, 2x)

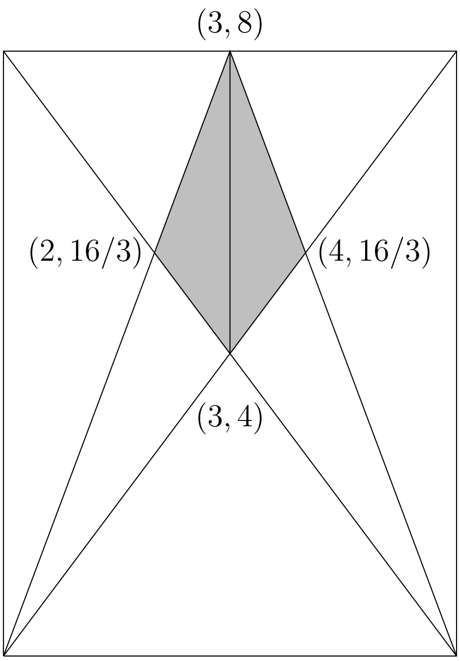
Wie groß ist die Fläche des Drachenvierecks, das durch die eingezeichneten 4 Liniensegmente eines Rechtecks mit den Seitenlängen 6 und 8 gebildet wird? Der obere Eckpunkt des Drachenvierecks ist der Mittelpunkt der oberen Seite des Rechtecks.



4

Ausarbeitung Aufgabe 5

Die linke untere Ecke soll den Ursprung darstellen. Wir können dann durch Geradengleichungen oder Steigungsdreiecke einige Koordinaten auf der Figur hinzufügen:



Das Drachenviereck wird aufgeteilt in zwei kongruente Dreiecke. Die Fläche des Drachenvierecks ist also $2 \cdot \dfrac{1 \cdot 4}{2} = 4$.

4

Aufgabe 6 (20 Punkte, 2×)

Was ist der Rest bei der Division der 2024-stelligen Zahl

$$\underbrace{3\ldots3\ldots3}_{\textit{2024 mal}}$$

durch 7?

5

Ausarbeitung Aufgabe 6

Das Hinzufügen einer 3 am Ende entspricht der Multiplikation mit 10 und der anschließenden Addition von 3. Aus einer Zahl $n = 7k + r$ (Rest r bei Division durch 7) wird $10 \cdot n + 3 = 10 \cdot (7k + r) + 3 = 70k + 10r + 3 = 70k + 7r + 3r + 3$. Also hat dies den gleichen Rest wie $3r+3$ bei Division durch 7. Daraus erhält man sukzessive:

$$\begin{aligned}
3 &\text{ hat Rest 3 bei Division durch 7,}\\
33 &\text{ hat den gleichen Rest wie } 3\cdot 3+3=12, \text{ also } 5,\\
333 &\text{ hat den gleichen Rest wie } 3\cdot 5+3=18, \text{ also } 4,\\
3333 &\text{ hat den gleichen Rest wie } 3\cdot 4+3=15, \text{ also } 1,\\
33333 &\text{ hat den gleichen Rest wie } 3\cdot 1+3=6, \text{ also } 6,\\
333333 &\text{ hat den gleichen Rest wie } 3\cdot 6+3=21, \text{ also } 0,\\
3333333 &\text{ hat den gleichen Rest wie } 3\cdot 0+3=3, \text{ also } 3.
\end{aligned}$$

Da jeder Rest nur vom vorigen Rest abhängt, wiederholt sich jetzt die Folge mit einer Periode der Länge 6. 2024 ergibt Rest 2 nach Division durch 6.

Damit hat $\underbrace{3\ldots3\ldots3}_{\textit{2024 mal}}$ den gleichen Rest (durch 7) wie 33, also 5.

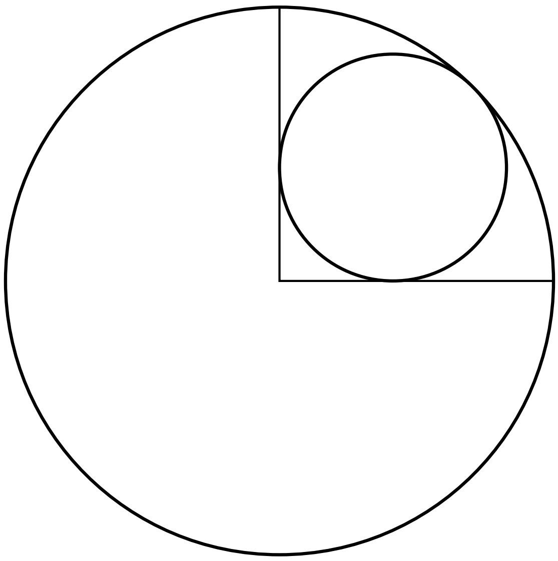
5

Aufgabe 7 (20 Punkte, 3×)

Gegeben sei ein Kreis mit dem Radius R.

Wie groß muss R sein, wenn die Fläche des größten Kreises, der in ein Viertel des gegebenen Kreises passt, um π von der Fläche des gesamten Kreises abweicht?
Die Antwort sollte in der folgenden Form gegeben werden:

$$\sqrt{\frac{a+\sqrt{2}}{b}} \qquad \textit{mit} \quad a, b \in \mathbb{Z}.$$



$\sqrt{\frac{1+\sqrt{2}}{2}}$

Ausarbeitung Aufgabe 7

Sei r der Radius des kleineren Kreises. Mit Hilfe des Satzes von Pythagoras ergibt sich für den Abstand der beiden Kreismittelpunkte $\sqrt{2} \cdot r$ und damit:

$$R = \sqrt{2} \cdot r + r = (1 + \sqrt{2}) \cdot r$$

Die Bedingung der Aufgabe besagt:

$$\pi \cdot R^2 = \pi \cdot r^2 + \pi \qquad \text{oder} \qquad R^2 = \left(\frac{1}{1+\sqrt{2}}\right)^2 \cdot R^2 + 1.$$

Dies führt zu

$$1 = \left(1 - \left(\frac{1}{1+\sqrt{2}}\right)^2\right) \cdot R^2 = 2 \cdot \frac{1+\sqrt{2}}{3+2\sqrt{2}} \cdot R^2,$$

also

$$R^2 = \frac{1}{2} \cdot \frac{3+2\sqrt{2}}{1+\sqrt{2}}$$

Wenn man den Nenner rational macht, erhält man:

$$R^2 = \frac{1}{2} \cdot \frac{(3+2\sqrt{2})(1-\sqrt{2})}{1-2} = \frac{-1-\sqrt{2}}{-2}$$

und schließlich:

$$R = \sqrt{\frac{1+\sqrt{2}}{2}}.$$

$\sqrt{\frac{1+\sqrt{2}}{2}}$

Aufgabe 8 (20 Punkte, 2x)

Was ist die größte periodische Dezimalzahl kleiner 1 mit Periodenlänge von genau 6, die in einer Periode nur paarweise unterschiedliche Ziffern hat, in deren Periode also keine Ziffer mehr als einmal vorkommt? Gebt die Antwort als Bruch an.

$\frac{987.654}{999.999}$ oder $\frac{329.218}{333.333}$

Ausarbeitung Aufgabe 8

Offensichtlich ist die Zahl

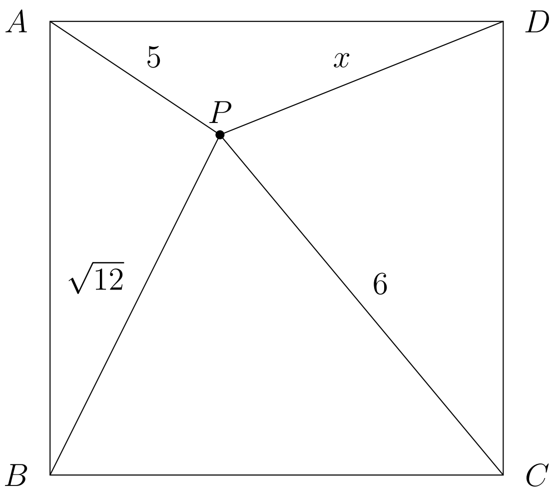
$$0,\overline{987654} = \frac{987654}{999999} = \frac{329218}{333333}.$$

$\frac{987.654}{999.999}$ oder $\frac{329.218}{333.333}$

Aufgabe 9 (20 Punkte, 2x)

Gegeben seien ein Quadrat und ein Punkt P im Inneren des Quadrats. Die Abstände von P zu den Ecken A,B und C sind 5, $\sqrt{12}$ und 6 (siehe die nicht maßstabsgetreue Abbildung unten).

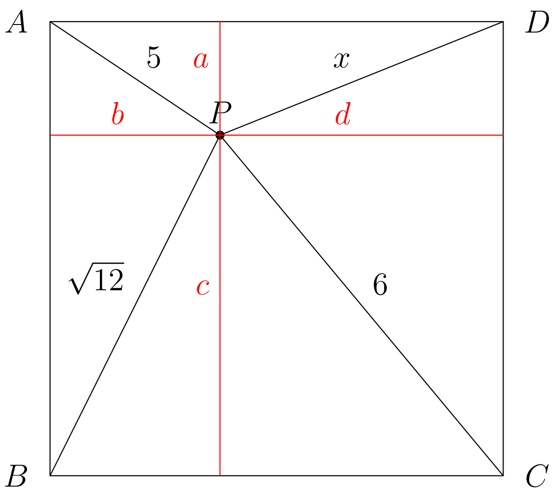
Wie groß ist der Abstand zwischen P und der Ecke D?



7

Ausarbeitung Aufgabe 9

Wenn wir eine vertikale und eine horizontale Linie einzeichnen und dann den Satz des Pythagoras anwenden, erhalten wir:



$$
\begin{aligned}
x^2 &= a^2 + d^2 \\
&= 5^2 - b^2 + d^2 \\
&= 5^2 - (12 - c^2) + d^2 \\
&= 5^2 - 12 + c^2 + d^2 \\
&= 5^2 - 12 + 6^2 = 49
\end{aligned}
$$

Damit beträgt der Abstand 7.

7

Aufgabe **10** (30 Punkte, 2x)

Tess und Claudia wählen jeweils beide eine natürliche Zahl, die größer als oder gleich 1 und kleiner als oder gleich 30 sein muss. Sie wissen beide um diese Einschränkungen, aber sie sagen einander nicht, welche Zahlen sie gewählt haben. Dann findet das folgende Gespräch statt:

> Tess: „Ist deine Zahl doppelt so groß wie meine?“
>
> Claudia: „Ich weiß es nicht. Ist deine Zahl doppelt so groß wie meine?“
>
> Tess: „Ich weiß es nicht. Ist deine Zahl halb so groß wie meine?“
>
> Claudia: „Ich weiß es nicht. Ist deine Zahl die Hälfte von meiner?“
>
> Tess: „Ich weiß es nicht“.

Wie lautet die Zahl von Tess?

Bemerkung: Tess und Claudia sind sehr gut in Mathematik. Wenn sie sagen, dass sie etwas nicht wissen, bedeutet das, dass es nicht aus den verfügbaren Informationen abgeleitet werden kann.

4

Ausarbeitung Aufgabe **10**

Wir bezeichnen die Zahl von Tess mit t und die Zahl von Claudia mit c. Nach der ersten Aussage von Claudia weiß Tess, dass c gerade ist. Wäre c nämlich ungerade, hätte Claudia gewusst, dass ihre Zahl nicht das Doppelte von Tess' Zahl sein kann. Daher gilt:

$$c \in \{2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18, 20, 22, 24, 26, 28, 30\}.$$

In ähnlicher Weise weiß Claudia nach der nächsten Aussage von Tess, dass Tess' Zahl das Doppelte von einer der oben genannten Möglichkeiten für c sein muss. Andernfalls hätte Tess gewusst, dass ihre Zahl nicht doppelt so groß sein kann wie Claudias Zahl. Daher gilt:

$$t \in \{4, 8, 12, 16, 20, 24, 28\}.$$

Nach der nächsten Aussage von Claudia weiß Tess, dass Claudias Zahl die Hälfte von einer der oben genannten Möglichkeiten für t sein muss. Sonst hätte Claudia gesagt, dass ihre Zahl nicht die Hälfte von Tess' Zahl ist. Deshalb gilt:

$$c \in \{2, 4, 6, 8, 10, 12, 14\}.$$

In ähnlicher Weise weiß Claudia nach der letzten Aussage von Tess, dass Tess' Zahl die Hälfte einer der oben genannten Möglichkeiten für c sein muss. Die einzige Zahl in der obigen Liste der Möglichkeiten für t, die diese Eigenschaft hat, ist $t = 4$.

4

Aufgabe **11** (20 Punkte, 2x)

Wir beginnen mit einem Quadrat mit der Seitenlänge 1 und zeichnen eine Diagonale ein. Dann erweitern wir das Quadrat horizontal zu einem Rechteck, dessen Breite der Länge der vorherigen Diagonale entspricht. Wir setzen diese Konstruktion nach rechts fort, bis wir 899 Linien gezeichnet haben.

Wie lang ist die letzte Linie?

30

Ausarbeitung Aufgabe **11**

Wir bezeichnen die Länge der n-ten blauen Diagonalen mit d_n. Nach dem Satz von Pythagoras hat die erste blaue Diagonale die Länge $d_1 = \sqrt{2}$. Diese blaue Seite wird zu einer Seite eines rechtwinkligen Dreiecks mit der Hypothenuse d_2 und der anderen Seite 1. Folglich ist

$$d_2^2 = d_1^2 + 1^2 = 3.$$

Die Wiederholung dieser Konstruktion ergibt:

$$d_n^2 = d_{n-1}^2 + 1 = n + 1,$$

also:

$$d_{899} = \sqrt{900} = 30.$$

30

Aufgabe 12 (20 Punkte, 3x)

Um eine Ziffer auf einer Digitaluhr anzuzeigen, muss man von 7 strichförmigen Lichtern jedes Mal eine Auswahl ein- oder ausschalten. Das Einschalten eines Lichts kostet 1 Cent. Wir nehmen an, dass das Ausschalten und Anlassen der Lichter kostenlos ist. In der beigefügten Abbildung kann man sehen, wie die Ziffern gebildet werden.

Wir sehen also beispielsweise, dass es kein Geld kostet, von 7:00 bis 7:01 zu schalten, und dass wir von 7:01 zu 7:02 4 Cent bezahlen müssen. Wir beginnen um 7:00 Uhr und haben noch nichts bezahlt.

Wie viel Cent haben wir bezahlt, wenn die Uhr auf 8:00 steht?

104 Cent

Ausarbeitung Aufgabe 12

Die entstehenden Kosten sind:

$$\begin{gathered}
0 \to 1 = 0, \quad 1 \to 2 = 4 \\
2 \to 3 = 1, \quad 3 \to 4 = 1 \\
4 \to 5 = 2, \quad 5 \to 6 = 1 \\
6 \to 7 = 1, \quad 7 \to 8 = 4 \\
8 \to 9 = 0, \quad 9 \to 0 = 1 \\
5 \to 0 = 2
\end{gathered}$$

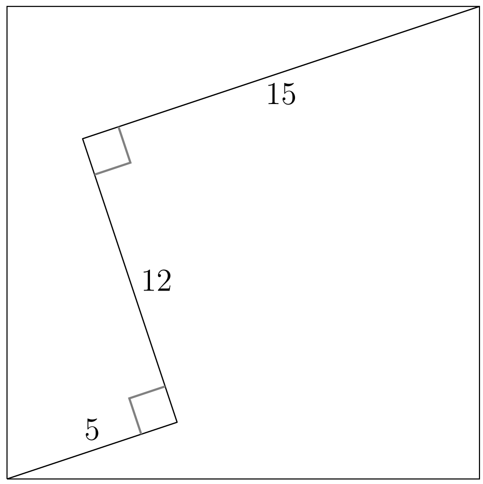
Wir müssen 6 mal die Schritte $0 \to 1 \to 2 \cdots \to 9 \to 0$ an der ganz rechten Stelle der Digitalanzeige durchführen. Auf diese Weise entstehen Kosten von $6 \cdot 15 = 90$ Cent. An der mittleren Stelle der Digitalanzeige müssen wir die Schritte $0 \to 1 \to 2 \cdots \to 5 \to 0$ durchführen, hier entstehen Kosten von 10 Cent. Dann erfolgt noch die Umschaltung $7 \to 8$, die 4 Cent kostet.

Es entstehen somit Gesamtkosten von $90 + 10 + 4 = 104$ Cent.

104 Cent

Aufgabe **13** (30 Punkte, 3x)

In ein Quadrat sind ein paar Linien mit gegebenen Größen und angedeuteten rechten Winkeln eingezeichnet:

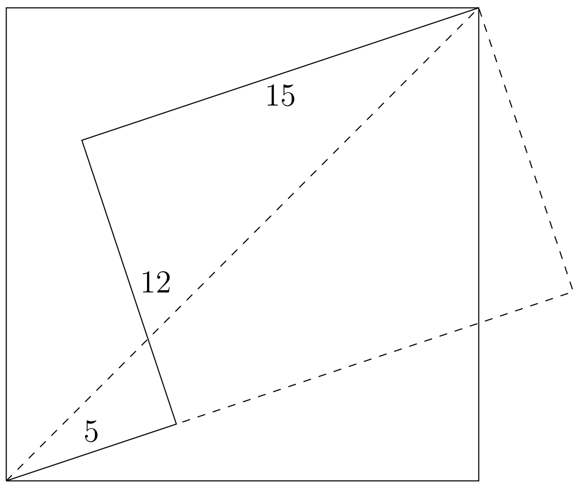


Wie groß ist der Flächeninhalt des Quadrats?

272

Ausarbeitung Aufgabe **13**

Wir fügen einige Strecken hinzu:



Es sei d die Länge der Diagonale und z die Seite des Quadrats. Nach dem Satz von Pythagoras haben wir:

$$d^2 = (5 + 15)^2 + 12^2 = 544,$$
$$z^2 + z^2 = d^2.$$

Die Kombination beider Ergebnisse ergibt:

$$z^2 = 544/2 = 272.$$

272

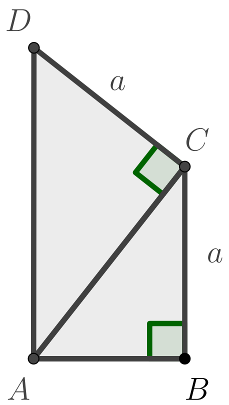
Aufgabe 14 (30 Punkte, 3x)

Zwei rechtwinklige Dreiecke $\triangle ABC$ mit den Kathetenlängen $|AB| = 1$ und einer noch zu bestimmenden Länge $|BC| = a$ und $\triangle ACD$ mit den Katheten AC und CD, wobei $|CD| = a$, werden entlang AC so aneinandergelegt, dass $\angle_{BAD}$ ein rechter Winkel ist.

Was ist die Länge von a?

Eure Antwort sollte in der folgenden Form gegeben werden:

$$\sqrt{\frac{x+\sqrt{5}}{y}} \qquad \textit{mit} \quad x, y \in \mathbb{Z}.$$



$\sqrt{\frac{1+\sqrt{5}}{2}}$

Ausarbeitung Aufgabe 14

Die Dreiecke $\triangle ACD$ und $\triangle ABC$ haben drei gleiche Winkel und sind daher ähnlich. Dies führt zu:

$$\frac{a}{1} = \frac{\sqrt{1+a^2}}{a}$$

und nach Quadrieren zu:

$$\frac{a^2}{1} = \frac{1+a^2}{a^2}.$$

Dies ist die Gleichung für den Goldenen Schnitt mit $a^2 = \varphi$ (alternativ Lösungsformel für quadratische Gleichung $\varphi^2 = \varphi + 1$), und damit:

$$a = \sqrt{\varphi} = \sqrt{\frac{1+\sqrt{5}}{2}}.$$

$\sqrt{\frac{1+\sqrt{5}}{2}}$

Aufgabe 15 (30 Punkte, 2x)

Bob und seine Frau Anne richten eine Party bei sich zu Hause aus und laden 12 andere Paare ein. Während der gesamten Veranstaltung schütteln sich manche der Teilnehmenden (Ausrichtende und Gäste) die Hände, aber nie mit dem*der eigenen Partner*in. Nach der Party geht Bob herum und fragt alle Teilnehmenden, auch Anne, mit wie vielen der Teilnehmenden sie die Hände geschüttelt haben. Zu seiner Überraschung gibt jede Person eine andere Antwort.

Wie vielen Personen hat Anne während der Party die Hand geschüttelt?

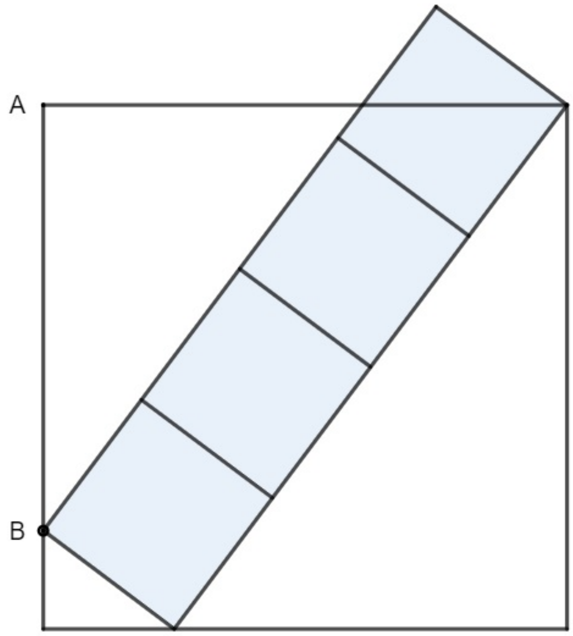
12

Ausarbeitung Aufgabe 15

Jede der 25 von Bob befragten Personen kann eine Antwort zwischen 0 und 24 geben (da niemand seinem*r Partner*in die Hand gibt). Da jede*r Teilnehmer*in eine andere Antwort gegeben hat, bedeutet dies, dass jede der Zahlen 0 bis 24 auch tatsächlich als Antwort gegeben wurde. Man beachte, dass die Person, die 24 geantwortet hat, allen die Hand geschüttelt hat außer die*dem eigenen Partner*in und daher zwangsläufig die*der Partner*in derjenigen Person sein muss, die 0 geantwortet hat. Ebenso kann man folgern: Die Person, die 23 gesagt hat, hat allen die Hand geschüttelt außer die*dem eigenen Parter*in und der Person, die niemandem die Hand gegeben hat. Die Person, die 1 gesagt hat, hat aber auf jeden Fall derjenigen Person die Hand geschüttelt, die 24 gesagt hat, kann also keiner anderen Person die Hand gegeben haben. Also muss die Person, die 1 gesagt habt, in jedem Fall die*der Partner*in der Person sein, die 23 gesagt hat. So geht es induktiv immer weiter: Die Person, die k gesagt hat, muss die*der Partner*in der Person sein, die $24 - k$ gesagt hat. Das bedeutet, dass die beiden Personen, die 12 Personen die Hand geschüttelt haben, ein Paar sein müssen. Gleichzeitig können sie kein Paar sein, das Bob gefragt hat, weil jede Person eine andere Antwort gegeben hat. Somit müssen Anne und Bob dieses Paar sein und Anne hat 12 Personen die Hand geschüttelt.

12

Aufgabe **16** (30 Punkte, 2x)



Die Abbildung zeigt ein großes Quadrat und vier kleinere Quadrate. Sei $|AB| = 13$.

Wie groß ist die Fläche der vier kleinen Quadrate zusammen?

100

Ausarbeitung Aufgabe **16**

Alle drei weißen Dreiecke sind zueinander ähnlich. Da die Hypothenuse des Dreiecks in der linken unteren Ecke viermal kleiner als die des Dreiecks auf der rechten Seite ist, gilt das Gleiche für die Katheten. Wenn wir also die kleinere Kathete des linken Dreiecks b und die größere Kathete a nennen, dann erhalten wir: $a + 4b = 13 + b$, also $a + 3b = 13$ und $a + 4b = 4a$. Daraus folgt, dass $a = 4$ und $b = 3$. Mit dem Satz des Pythagoras ist die Seitenlänge der kleinen Quadrate gleich 5 und die gesuchteFläche daher gleich $4 \cdot 5^2 = 100$.

100

Aufgabe **17** (30 Punkte, 2x)

Ein gewöhnlicher Würfel hat 6 Seiten, auf denen die Zahlen 1 bis 6 so positioniert sind, dass die Summe der Werte auf den gegenüberliegenden Seiten immer gleich 7 ist. Legt n solcher Würfel in einer Reihe nebeneinander auf den Tisch. Addiert alle Zahlen, die nicht durch den Tisch oder einen benachbarten Würfel verdeckt sind. Die maximale Zahl, die man auf diese Weise erhalten kann, wird mit $A(n)$ bezeichnet, das Minimum mit $a(n)$. Wir betrachten nun die Folge der Differenzen $d(n) = A(n) - a(n)$.

Was ist $d(2024)$?

10126

Ausarbeitung Aufgabe **17**

Bei zwei oder mehr Würfeln haben wir zwei äußere Würfel, bei denen jeweils die Unterseite und die an den benachbarten Würfel angrenzende Seite verdeckt sind, und $n-2$ innere Würfel. Für jeden der beiden äußeren Würfel sind im Maximalfall die Eins und die Zwei und im Minimalfall die Sechs und die Fünf nicht sichtbar. Bei den inneren Würfeln sind die untere Seite (im Maximalfall die Eins und im Minimalfall die Sechs) und auch die beiden Seiten, die an die benachbarten Würfel angrenzen, verdeckt. Da sich diese beiden Seiten auf den Würfeln gegenüberliegen, ist ihre Summe immer 7. Die Differenz zwischen der größtmöglichen und der kleinstmöglichen Augensumme für n Würfel ist also:

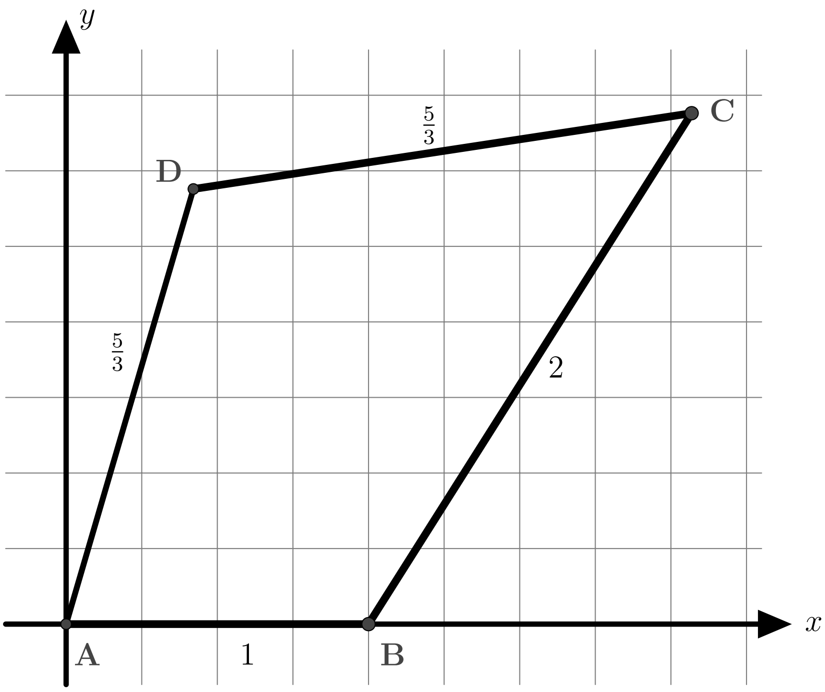
$$\begin{aligned} d(n) &= A(n) - a(n) \\ &= \{n \cdot 21 - [2 \cdot (1+2) + (n-2) \cdot 1 + (n-2) \cdot 7]\} \\ &\quad -\{n \cdot 21 - [2 \cdot (5+6) + (n-2) \cdot 6 + (n-2) \cdot 7]\} \\ &= 16 + (n-2) \cdot 5. \end{aligned}$$

Wir erhalten:

$$d(2024) = 16 + 2022 \cdot 5 = 10126.$$

10126

Aufgabe **18** (30 Punkte, 3×)



Wir betrachten ein Viereck $ABCD$ in einem kartesischen Koordinatensystem, wie oben dargestellt. Die vier Punkte sollen folgende Koordinaten haben:

$A = (0,0)$, $B = (1,0)$, $C = (x,y)$, $D = (u,v)$.

Für die Abstände zwischen den Punkten gilt:
$|AB| = 1$, $|BC| = 2$, $|CD| = \frac{5}{3}$, $|AD| = \frac{5}{3}$.

Berechnet die Zahl $xu - x + yv$ als vollständig gekürzten Bruch.

$\frac{3}{2}$

Ausarbeitung Aufgabe **18**

Zunächst lösen wir die Aufgabe mit direkten und einfachen Rechnungen:

$$\begin{aligned} |BC| &= \sqrt{(x-1)^2 + y^2} &&= 2, \\ |AD| &= \sqrt{u^2 + v^2} &&= \frac{5}{3}, \\ |CD| &= \sqrt{(u-x)^2 + (v-y)^2} &&= \frac{5}{3}. \end{aligned}$$

Nach Quadrieren, Ausmultiplizieren und Umordnen erhält man:

$$x^2 - 2x + y^2 = 3, \tag{1}$$
$$u^2 + v^2 = = \frac{25}{9}, \tag{2}$$
$$x^2 - 2xu + u^2 + v^2 - 2yv + y^2 = \frac{25}{9}. \tag{3}$$

Addition von (1) zu (2) führt zu:

$$x^2 + y^2 + u^2 + v^2 - 2x = \frac{52}{9}. \tag{4}$$

Nun subtrahieren wir (3) von (4) und erhalten:

$$-2x + 2xu + 2yv = \frac{27}{9} = 3$$

und daher:

$$xu - x + vy = \frac{3}{2}.$$

Alternativ lösen wir die Aufgabe unter der Annahme, dass die Frage sinnvoll ist: Dann hängt der Wert $xu - x - yv$ nicht von den Winkeln des Vierecks ab, so dass man die Seiten verschieben kann, ohne ihre Längen zu verändern. Man kann zum Beispiel C um B drehen, bis C auf der x-Achse liegt. (D wird ebenfalls verschoben.) Dann haben wir

$$C = (x,y) = (3,0).$$

Es bleibt ein gleichschenkliges Dreieck ACD übrig. Es ist also klar, dass

$$D = (u, v) = \left(\frac{3}{2}, v\right)$$

und

$$xu - x + vy = 3 \cdot \frac{3}{2} - 3 + 0 = \frac{3}{2}.$$

$\frac{3}{2}$

Aufgabe **19** (30 Punkte, 3x)

Hilberts unendliches Hotel

Zu einem Hotel mit unendlich vielen Etagen und unendlich vielen Zimmern pro Etage, die beide von 1 bis unendlich nummeriert sind, kommt ein Bus mit unendlich vielen Personen. Alle Gäste wohnen in ihrem eigenen Zimmer, wobei in jedem Zimmer eine Person wohnt, deren Etage (v) und Zimmernummer (k) folgendermaßen vergeben werden:

- Die Gäste werden in aufsteigender Reihenfolge nummeriert.
- Der Reihe nach soll jedem Gast die kleinstmögliche Etage v zugewiesen werden. Dabei darf ein Gast mit Nummer n nur dann in einer Etage v untergebracht werden, wenn
  - die Etage v leer ist oder
  - $v + n$ eine Quadratzahl ist, also von der Form m^2 für eine ganze Zahl m.

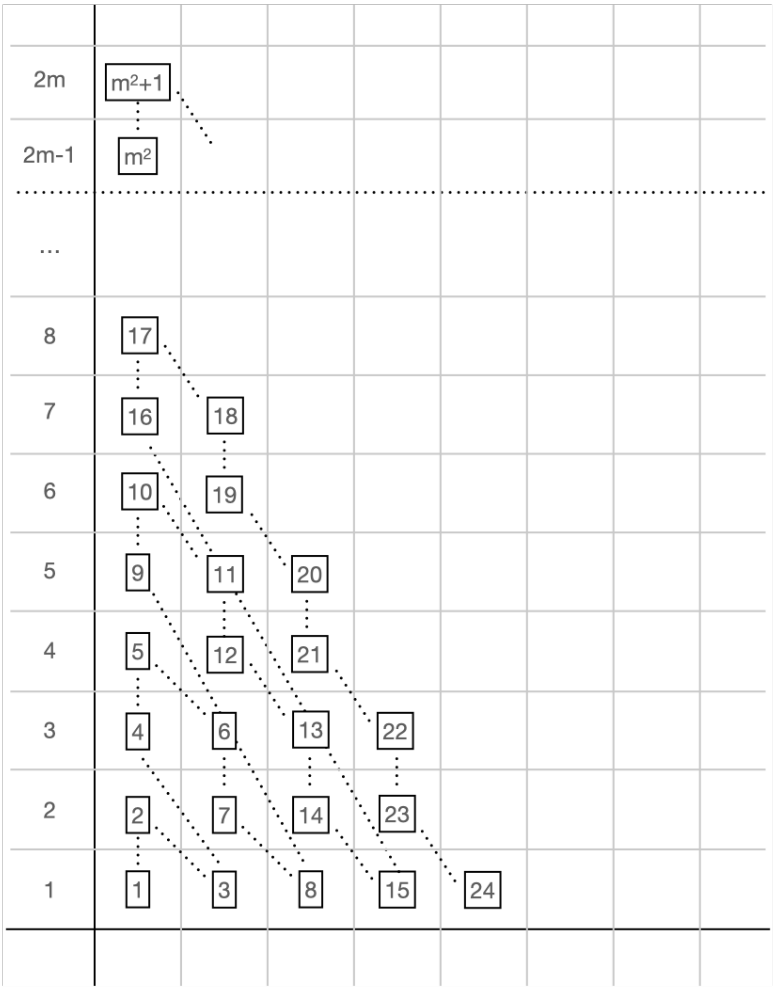
Wenn ein Gast in einer Etage untergebracht ist, wird ihm das Zimmer mit der kleinsten verfügbaren Nummer k in dieser Etage zugewiesen. Das resultierende Zimmer wird dann als (v, k) notiert.

Die Verteilung sieht also folgendermaßen aus:
Person 1 gelangt in die Etage 1, die leer ist, und erhält somit den Raum $(1, 1)$.
Für Person 2 wird die Etage 1 betrachtet, die nicht leer ist. Da $1 + 2$ kein perfektes Quadrat ist, geht sie in die Etage 2, die leer ist, und erhält dort den Raum $(2, 1)$.
Für Person 3 wird die Etage 1 betrachtet, die nicht leer ist. Da $1 + 3 = 4 = 2^2$ eine Quadratzahl ist, erhält Person 3 den Raum $(1, 2)$. Für die Person in Zimmer $(1, 2)$ ist der Wert von n also 3.

Welchen Wert hat n für die Person im Raum $(20, 24)$?

1136 oder $33^2 + 47$

Ausarbeitung Aufgabe 19



Alle Personen, die als Numer eine Quadratzahl haben, gehen in eine neue Etage und auch die Personen mit der auf eine Quadratzahl folgenden Zahl gehen in eine neue Etage (siehe Bild), was durch Induktion bewiesen werden kann. Danach gibt es einen Zyklus, bei dem in jedem Stockwerk absteigend jemand hinzukommt (siehe Bild). Die erste Person im Stockwerk 20 hat die Nummer $n_{20} = 101 = 10^2 + 1$ und nun brauchen wir 23 weitere Zyklen, um die Zimmernummer 24 zu füllen. Die Person mit der Zimmernummer 24 in der Etage mit der Nummer $v = 20$ stammt also aus dem Zyklus mit $n_{66} = 33^2 + 1$. Da es die $(66 - 20)te = 46$te Person in diesem Zyklus ist, ergibt sich $n = 33^2 + 47 = 1136$.

1136 oder $33^2 + 47$

Aufgabe 20 (30 Punkte, 3x)

Thomas und Vincent leben 100 km voneinander entfernt. Sie lieben beide die Waffeln, die ihre Mutter für sie backt. Eines Tages backt ihre Mutter 300 Waffeln und schenkt sie Vincent. Thomas bittet Vincent, ihm davon so viele Waffeln vorbeizubringen, wie er kann. Vincent verwendet dazu eine Tasche, in die höchstens 100 Waffeln passen. Allerdings muss Vincent für jeden zurückgelegten Kilometer eine Waffel essen, sonst kommt er nicht weiter.

Angenommen, Vincent kann hin und her gehen und einige Waffeln auf dem Weg zu Thomas liegen lassen, um sie später dann wieder abzuholen. Wie viele vollständige Waffeln kann Vincent dann maximal zu Thomas bringen?

53

Ausarbeitung Aufgabe **20**

Wir beginnen mit einigen intuitiven Überlegungen: Erstens ergibt es für Vincent keinen Sinn, Waffeln an zwei verschiedenen Orten zu hinterlassen, wenn er genau so gut an einem Ort eine größere Menge hinterlassen kann. Wenn also zum Beispiel Vincent 20 Waffeln an der 20-km-Marke und 40 Waffeln an der 40-km-Marke lässt und dann zurückläuft, ist es für ihn besser, direkt 60 Waffeln an der 40-km-Marke zu hinterlassen. Eine zweite Beobachtung ist, dass es besser ist ein Vielfaches von hundert Waffeln an einer bestimmten Markierung zu hinterlassen. Wenn er zum Beispiel 120 Waffeln an einem Ort zurücklässt, an dem nur 100 in seine Tasche passen, würde er 20 Waffeln für eine unnötige zusätzliche Reise verschwenden.

Es sei nun x der erste Ort, zu dem Vincent reist, und er lasse dort y Waffeln zurück. Die zu maximierende Definitionsgleichung lautet dann:

$$(x + y + x) + (x + y + x) + 100 = 300$$

(wobei die Klammern eine Reise zum Punkt x und zurück angeben). Wir streben an, dass $y+y+100-x$ ein Vielfaches von 100 ist und dass $x+y+x = 100$ gilt. Die Lösung lautet also: $x = 20$ und $y = 60$ (oder $x = 40$ und $y = 20$). Vincent sollte also 20 km zurücklegen, 60 Waffeln abgeben und zurückkehren. Wenn er dies zweimal tut und dann die letzte Ladung Waffeln zur 20-km-Marke trägt, lagern 200 Waffeln dort. Ähnliche Gleichungen ergeben, dass er weitere $33 + \frac{1}{3}$ km zurücklegen sollte, um 100 Waffeln an der $53 + \frac{1}{3}$ km-Marke zu lagern. Wenn er diese Waffeln den ganzen Weg bis zu Thomas mitnimmt, bleiben am Ende 53 vollständige Waffeln übrig.

Wir beweisen nun rigoros, dass diese Strategie optimal ist: Jede Strategie, falls sie existiert, würde aus endlich vielen Schritten bestehen (wobei ein Schritt hier als die Aktion definiert ist, Waffeln von Punkt A nach Punkt B zu bringen). Wir ignorieren nicht-ganzzahlige Lösungen. Wir können eine Äquivalenzrelation auf der Menge der Strategien definieren, indem wir zwei Strategien für äquivalent erklären, wenn sie mit der gleichen Anzahl von erhaltenen Waffeln enden. Nun wählen wir aus jeder Äquivalenzklasse einen Repräsentanten, und lassen S das maximale Element unter den Repräsentanten sein (wir ignorieren also äquivalent gute Strategien). Dieses S besteht ausS chritten $s_1, s_2, \ldots, s_N$. Dabei sei s_N der letzte Schritt, bei dem eine bestimmte Menge von Waffeln $W \leq 100$ von einem Punkt Y zur Ziellinie bewegt wird. Es gibt keine Strategie, bei der die Tüte mehr als W Waffeln am Punkt Y fassen kann, da S optimal ist. Wenn es nämlich eine bessere Strategie Q gäbe, die mehr als W Waffeln an Y liefert, dann ergibt die kombinierte Strategie von Q und dann s_N eine bessere Strategie als S, was ein Widerspruch ist. Wenn eine andere Strategie W Waffeln von einem Punkt $Z < Y$ wegbewegt hätte, wäre sie ebenfalls nicht optimal. Betrachtet man also ein umformuliertes Problem mit Y als Ziellinie und

300 Ausgangs-Waffeln, so ergibt sich, dass die beste Strategie W Waffeln an dem Punkt Y liefern sollte, wobei Y so groß wie möglich sein sollte. Daher kann keine Strategie, die weniger als 100 Waffeln bei Y liefert, besser sein, wenn es eine Strategie gibt, die 100 Waffeln bei Y liefert, wobei Y maximiert ist. Wenn wir also eine Strategie aufzeigen, die 100 Waffeln vor dem ultimativen Weg liefert, wobei die Entfernung $100 - Y$ minimiert wird, muss sie der besten Strategie entsprechen. Die Rückwärtsinduktion beweist, dass die Schritte immer Taschen mit 100 Waffeln verwenden und die restliche Entfernung minimieren müssen. Da die vorgeschlagene Lösung dies tut, muss sie mit der optimalen Strategie S äquivalent sein. (Tatsächlich beweist dieser Beweis allgemeiner, dass für jede anfängliche Waffelanzahl und jede Entfernung die beste Strategie darin besteht, so zu arbeiten, dass jedes Mal, wenn man eine Tüte Waffeln zwischen zwei Punkten bewegt, man 100 Waffeln in der Tüte haben muss, die man bewegt, und die endgültige Entfernung zu minimieren).

53