Internationales Mathematikturnier 2024
Aufgaben Sum of Us

20. September 2024

Liebe Teilnehmer*innen,

Dieses Dokument enthält die Aufgaben für den ersten Teil des Internationalen Mathematikturniers 2024, die *Sum of Us*-Runde. Wie ihr wisst, ist das Thema dieser Runde dieses Jahr *Spieltheorie*. Bevor ihr beginnt, empfehlen wir euch, die Anweisungen auf der nächsten Seite gründlich zu lesen.

Die Aufgaben wurden unter Begleitung von Peter Hochs und Sep Thijssen von zwei Mathematikstudenten der Radboud Universiteit, Jimme Bergfeld und Gwen Bleckmann, geschrieben.

Wir wünschen euch viel Erfolg, aber vor allem eine gute Erfahrung, sodass ihr glücklich seid mit eurer Entscheidung, am Mathematikturier teilzunehmen!

Die Organisationsteams,

Stefan Hartmann & Rainer Kaenders (Universität Bonn)
Michael Gruber, Thorsten Holm, Florian Leydecker & Víctor González Alonso (Leibniz Universität Hannover)
Niels Bonneux & Joeri Van der Veken (KU Leuven)
Peter Hochs & Sep Thijssen (Radboud Universiteit Nijmegen)

Allgemeine Informationen

Antworten

- Schreibt eure Antworten auf die dafür vorgesehenen Antwortblätter.
- Vergesst nicht, auf jedes Antwortblatt eure Tischnummer zu schreiben!
- Gebt eure Endergebnisse exakt, also nicht abgerundet, an! Wenn eure Antwort einen Bruch enthält, vereinfacht diesen dann so weit wie möglich.
- Reicht eure Antwortblätter bei den Korrektor*innen ein, lasst sie nicht auf dem Tisch liegen!

Punkteverteilung

Abschnitt 1: $10 + 10 + 20 + 20 = 60$
Abschnitt 2: $10 + 20 + 15 + 15 = 60$
Abschnitt 3: $15 + 30 + 20 + 20 + 30 = 115$
Abschnitt 4: $20 + 15 + 20 + 25 + 30 = 110$
Abschnitt 5: $10 + 20 = 30$
Abschnitt 6: $30 + 15 = 45$
Abschnitt 7: $20 + 20 + 20 + 20 = 80$

Die Maximalpunktzahl für diese Runde ist 500 Punkte. Die Minimalpunktzahl ist 0.

Die meisten Aufgaben sind unabhängig voneinander, aber manchmal könnt ihr bei einer Aufgabe ein Ergebnis einer früheren Aufgabe verwenden. Wenn ihr in so einem Fall die frühere Aufgabe falsch habt und bei der späteren Aufgabe eine folgerichtige Antwort gebt, wird diese trotzdem auch als falsch gewertet.

Erlaubte Hilfsmittel

- Schmierpapier, Stift, Bleistift, Lineal.
- Ein nicht-grafikfähiger Taschenrechner.
- Das Buch mit dem Vorbereitungsmaterial, inklusive der Antworten auf die Aufgaben darin.

1 Ein Wettbewerb im Pfahlsitzen [60 Punkte]

Pfahlsitzen ist eine Aktivität, bei der die Teilnehmenden so lange wie möglich auf der Oberseite eines Pfahles sitzen bleiben. Das ist recht unkomfortabel. Es kostet also Durchhaltevermögen, lange auszuhalten. Wer am längsten sitzen bleibt, gewinnt.

Anne und Elise treten am Wochenende bei einem Pfahlsitzwettbewerb gegeneinander an. Bei so einem Wettbewerb können sie einander nicht sehen und müssen schon vorher beschließen, wie lange sie bereit sind sitzen zu bleiben. Sie wissen nicht, wie lange die jeweils andere sitzen bleibt. Diejenige, die am längsten sitzen bleibt, gewinnt einen Preis, und sie sind beide hochmotiviert, diesen zu gewinnen. Die genaue Situation ist wie folgt:

- Anne und Elise wählen vorher zwischen 1, 2 und 3 Stunden auf dem Pfahl sitzen.
- Vom Gewinnen des Preises werden beide glücklich; wir geben das mit dem Gewinn von 4 Punkten an.
- Wenn Anne und Elise die gleiche Zeitdauer wählen, teilen sie den Preis und bekommen beide zwei Punkte.
- Lange auf dem Pfahl sitzen ist nicht komfortabel, das geben wir mit einem Verlust von 1 Punkt (also einem Gewinn von -1 Punkt) pro Stunde an, die sie auf dem Pfahl sitzen.
- Wenn eine von beiden ihre vorher gewählte Zeit ausgesessen hat, geht sie nach unten. Dann ist der Wettbewerb vorbei und die andere Spielerin wird direkt danach auch nach unten geholt. (Auch wenn ihre vorher gewählte Zeit noch nicht vorbei ist.) Sie bekommen dann beide die Anzahl Minuspunkte, die sie tatsächlich gesessen haben. Also haben beide dieselbe Anzahl Minuspunkte, unabhängig davon, was sie am Anfang gewählt haben.

Aufgabe 1. [10 Punkte] Was ist der höchste Gewinn, den Anne bekommen kann?

Aufgabe 2. [10 Punkte] Was ist der höchste Verlust, den Elise erleiden kann?

Aufgabe 3. [20 Punkte] Schreibt die Bimatrix für diesen Pfahlsitzwettbewerb auf.

Fleur und Marleen sind gekommen, um Anne und Elise anzufeuern. Fleur unterstützt Anne und Marleen Elise. Die beiden beschließen, zusammen folgendes Spiel zu spielen: Wählt die zugehörige (unterstützte) Freundin genau eine Stunde Sitzzeit, so zahlt die Unterstützerin €0 in einen gemeinsamen Topf, für zwei Stunden Sitzzeit €5 und für drei Stunden €10. (Hierbei geht es um die vorher gewählte Anzahl Stunden von Anne oder Elise, nicht um die Anzahl der Stunden, die letztendlich gesessen werden.) Wenn Anne den Preis gewinnt, bekommt Fleur das gesamte Geld aus dem Topf, und wenn Elise den Preis gewinnt, bekommt Marleen das gesamte Geld. Fleur und Marleen teilen das Geld, wenn Anne und Elise den Preis teilen.

Aufgabe 4. [20 Punkte] Schreibt in einer Matrix Fleurs Gewinn dieses Spiels mit Marleen auf (also abzüglich des eigenen Einsatzes). Nehmt an, dass Fleur die Zeilenspielerin und Marleen die Spaltenspielerin ist.

2 Remen und Joep spielen Floorball [60 Punkte]

Floorball ist ein Hallensport, bei dem Elemente des Hallenhockeys und Eishockeys kombiniert werden. Remen kann als Floorballspieler auf das Tor schießen und Joep verteidigt als Torwart das Tor. Remen kann ausschließlich niedrige Bälle schießen und hat die Wahl zwischen links und rechts schießen. Joep kann nicht schnell genug reagieren, um alle Bälle abzuwehren. Er wählt eine Seite zum Verteidigen, und wenn Remen auf die andere Seite zielt, trifft er jedes Mal. Joep ist Rechtshänder und findet, dass die rechte Seite deutlich einfacher zu verteidigen ist als die linke.

Wenn Remen gewählt hat, ob er links oder rechts schießt, und Joep gewählt hat, ob er links oder rechts verteidigt, dann ist der Gewinn für Joep die Wahrscheinlichkeit, dass er den Ball abwehrt. Diese Wahrscheinlichkeit ist der Verlust für Remen.

Für einen der beiden Spieler ist die Matrix, die zu diesem Spiel gehört:

$$\begin{array}{r c} & \begin{array}{cc} \text{Links} & \text{Rechts} \end{array} \\ \begin{array}{r} \text{Links} \\ \text{Rechts} \end{array} & \begin{pmatrix} \frac{1}{5} & 0 \\ 0 & \frac{9}{10} \end{pmatrix} \end{array}$$

Aufgabe 5. [10 Punkte] Für welchen der beiden Spieler sind in der oben stehenden Matrix die Gewinne gegeben?

Aufgabe 6. [20 Punkte] Nehmt an, dass Joep die Strategie $\begin{pmatrix} p & 1-p \end{pmatrix}$ spielt. Bei jeder möglichen Aktion von Remen wird dann der zu erwartende Gewinn von Joep eine Funktion von p. Zeichnet für jede mögliche Aktion von Remen den Graphen des zu erwartenden Gewinns. Zeichnet diese Graphen in dieselbe Abbildung.

Aufgabe 7. [15 Punkte] Bestimmt die Maximin-Strategie für Joep. Gebt diese in der Form $\begin{pmatrix} a & b \end{pmatrix}$ mit Zahlen a und b an.

Aufgabe 8. [15 Punkte] Bestimmt die Minimax-Strategie für Remen. Gebt diese in der Form $\begin{pmatrix} a & b \end{pmatrix}$ mit Zahlen a und b an.

3 Die Noten von Daan und Kees [115 Punkte]

Achtung: Die Noten in dieser Aufgabe sind wie im niederländischen Schulsystem. Das heißt, dass 0 *die schlechteste Note und* 10 *die beste ist. Ab* 5 *zählt die Note als bestanden.*

Daan und Kees sind Klassenkameraden. Ihr Mathelehrer hat sich eine kreative Art überlegt, um Ihnen Noten (von 0 bis 10) für Spieltheorie zu geben: er lässt Daan und Kees ein Spiel spielen. Daan wählt eine Zeile und Kees eine Spalte in der folgenden Matrix. Der Wert, den sie hierbei erhalten, ist Daans Note. Nennt diese Note d. Die Note von Kees ist dann $10 - d$.

Bemerkung: Da die Punkte sich immer zu 10 *addieren, ist dies ein Spiel mit konstanten Summen, das wie ein Nullsummenspiel behandelt werden kann.*

$$\begin{pmatrix} 4 & 7 & 9 \\ 2 & 5 & 6 \\ 3 & 8 & 1 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 9. [15 Punkte] Wenn Daan und Kees nach der Maximin- oder Minimax-Strategie spielen, was ist dann die Note von Daan?

Daan und Kees sind nicht einverstanden mit den Noten, die sie durch das vorige Spiel erhalten haben. Sie fanden das Spiel auch recht uninteressant. Der Lehrer bietet ihnen an, das Spiel mit der folgenden Matrix noch einmal zu spielen:

$$\begin{pmatrix} 4 & 2 & 8 \\ 5 & 3 & 5 \\ 3 & 8 & 1 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 10. [30 Punkte] Welche Matrix bekommen Daan und Kees, wenn sie alle strikt dominierten Aktionen aus der Matrix entfernen?

Daan und Kees haben ihre Note erhalten. Sie finden es jetzt ein interessantes Spiel und wollen noch einmal spielen. Jetzt sind sie nicht mehr auf Zahlen zwischen 0 und 10 beschränkt. Das Ergebnis des Spiels ist nun ein Punktestand zwischen 0 und 20, und der Punktestand von Kees beträgt 20 minus Daans Punktestand. Daan beschließt, die folgende Matrix A zu verwenden. Daan ist der Zeilenspieler und Kees der Spaltenspieler.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 8 & 7 & 6 & 5 \\ 9 & 10 & 11 & 12 \\ 16 & 15 & 14 & 13 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 11. [20 Punkte] Daan und Kees wollen diese Matrix vereinfachen, indem sie so viele strikt dominierte Aktionen wie möglich entfernen. Wie viele strikt dominierte Aktionen können sie entfernen? Gebt alle strikt dominanten Aktionen für beide Spieler an, nachdem alle strikt dominierten Aktionen entfernt wurden.

Kees will das Spiel noch einmal mit folgender Matrix spielen:

$$B = \begin{pmatrix} 5 & 13 & 7 & 4 \\ 4 & 6 & 2 & 3 \\ 3 & 5 & 1 & 9 \\ 2 & 1 & 9 & 7 \end{pmatrix}$$

Wieder ist Daan der Zeilenspieler und Kees der Spaltenspieler.

Aufgabe 12. [20 Punkte] Beantwortet dieselben Fragen wie in Aufgabe 11 für die Matrix B.

Ihr Freund Ole sagt, dass die Matrizen, die der Dozent gegeben hat, um die Noten zu bestimmen, langweilig sind. Ole will mehr Spannung. Hierfür schlägt er vor, weniger Zahlen zu benutzen, die ungefähr in der Mitte zwischen 0 und 10 liegen, und stattdessen mehr Zahlen zu verwenden, die näher an 0 oder 10 liegen. (Hier geht es wieder um das ursprüngliche Spiel, bei dem Daan und Kees Zahlen zwischen 0 und 10 erhalten und Kees' Zahl gleich 10 minus Daans Zahl ist.) Er schlägt die Matrix C von hier unten vor. Daan als Zeilenspieler merkt, dass die erste Zeile strikt von einer Strategie dominiert ist.

$$C = \begin{pmatrix} 9 & 4 & 1 & 3 \\ 10 & 3 & 3 & 2 \\ 8 & 3 & 0 & 10 \\ 9 & 5 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 13. [30 Punkte] Daan versucht, Strategien zu finden, die die erste Zeile strikt dominieren. Sie sollen Kombinationen aus der zweiten, dritten und vierten Zeile sein. So eine Strategie ist von der Form $\begin{pmatrix} 0 & q & r & s \end{pmatrix}$. Die Menge aller q und r, die vorkommen, ergeben ein Vieleck in der (q, r)-Ebene. Gebt die Koordinaten der Eckpunkte dieses Vielecks an.

4 Sommeraktivitäten [110 Punkte]

Zwei Familien mit jeweils fünf Kindern spielen jeden Mittwoch zusammen. Nächste Woche gehen sie zusammen in einen Freizeitpark. In vielen Achterbahnen müssen immer je zwei Kinder nebeneinander sitzen. Die Eltern wollen gerne ihre Kinder untereinander mischen, sodass sie – wenn möglich – neben ihren besten Freunden sitzen können. Dafür haben Sie ihre Kinder aufgefordert, jedem der Kinder aus der anderen Familie eine Zahl von 1 bis 5 zu geben, abhängig davon, wie gerne sie neben dem Kind sitzen würden. Je höher die Zahl, desto lieber will das Kind neben dem anderen Kind sitzen. (Beachtet: Die Zahlen 1 bis 5 bedeuten nicht die Platzierung in den Top 5 eines Kindes. Ein Kind kann auch zwei anderen Kindern die gleiche Zahl geben, wenn es neben diesen beiden anderen Kindern genauso gerne sitzen möchte.)

Hieraus folgte die unten stehende Bimatrix. Die Zahlen $5;1$ in der Zeile von Quinten und der Spalte von Julia bedeuten zum Beispiel, dass Quinten zwar sehr gerne neben Julia sitzen will (Zahl 5), aber Julia nicht sehr gerne neben Quinten sitzen will (Zahl 1).

$$\begin{array}{c} \\ \text{Guillermo} \\ \text{Isra} \\ \text{Quinten} \\ \text{Simon} \\ \text{Veerle} \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} \text{Amy} & \text{Hans} & \text{Julia} & \text{Margot} & \text{Thijme} \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1;2 & 4;5 & 2;2 & 3;1 & 2;4 \\ 1;3 & 5;3 & 1;4 & 2;1 & 3;4 \\ 4;5 & 3;2 & 5;1 & 1;4 & 3;1 \\ 2;4 & 1;5 & 5;5 & 5;3 & 2;5 \\ 1;5 & 1;3 & 5;4 & 2;3 & 3;4 \end{pmatrix} \end{array}$$

Eine Kombination von zwei Kindern $(\text{Kind 1} \quad \text{Kind 2})$ sitzt nebeneinander in der Achterbahn, wenn

- kein einziges Kind aus Familie 1 lieber neben Kind 2 sitzen will als Kind 1 das will und
- kein einziges Kind aus Familie 2 lieber neben Kind 1 sitzen will als Kind 2 das will.

Aufgabe 14. [20 Punkte]
Welche Kombinationen von Kindern sitzen laut diesen Regeln nebeneinander in der Achterbahn? Schreibt die Namenskombinationen so auf: $(\text{Guillermo} \quad \text{Amy})$.
Achtung: Für jede falsche Kombination bekommt ihr 5 Punkte Abzug. (Die minimale Punktanzahl für diese Aufgabe ist 0.)

Eine Woche später sind Sommerferien und Isra und Julia dürfen zwei Monate lang wählen, was sie zusammen an den Mittwochnachmittagen unternehmen. Beiden macht Shoppen und zum Strand Gehen Spaß und sie lieben es, Eis und Kuchen zu essen. Sie geben beide jeder Kombination dieser Aktivitäten eine Zahl, um anzugeben, wie gut sie diese finden. In der unten angegebenen Bimatrix sind diese Zahlen von Isra (linke Zahl) und Julia (rechte Zahl) angegeben.

$$\begin{array}{c} \\ \text{Strand} \\ \text{Shoppen} \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cc} \text{Eis essen} & \text{Kuchen essen} \end{array} \\ \begin{pmatrix} 2;4 & 0;1 \\ 1;1 & 3;6 \end{pmatrix} \end{array}$$

Julia findet zum Beispiel, dass Eis Essen mehr zum Strand passt (Zahl 4) als zum Shoppen (Zahl 1).

Isra darf zwischen Strand und Shoppen und Julia zwischen Eis und Kuchen essen wählen. Am ersten Mittwoch entscheiden sich Isra und Julia für eine Kombination von Aktivität und Essen, bei der

- Isra beim gewählten Essen die andere Aktivität nicht besser findet und
- Julia bei der gewählten Aktivität das andere Essen nicht leckerer findet.

Aufgabe 15. [15 Punkte] Welche Kombination(en) erfüllt/erfüllen diese Regeln? Schreibt diese so auf: $\begin{pmatrix}\text{Aktivität} & \text{Essen}\end{pmatrix}$.
Bitte beachtet: Für jede falsche Kombination erhaltet ihr einen Punkteabzug von 5. *(Die Mindestpunktzahl für diese Aufgabe beträgt* 0.*)*

Am folgenden Mittwoch beschließen sie, ihre Wahl den Rest der Sommerferien anders zu treffen. Jeden Mittwoch wählt Isra jetzt mit einer bestimmten Wahrscheinlichkeit zwischen zum Strand Gehen und Shoppen, und Julia wählt mit einer bestimmten Wahrscheinlichkeit zwischen Eis und Kuchen essen. Sie wollen beide Wahrscheinlichkeiten so wählen, dass

- Isra bei der gewählten Wahrscheinlichkeit, mit der Julia zwischen Eis und Kuchen wählt, den meisten Spaß erwartet mit ihrer eigenen gewählten Wahrscheinlichkeit zwischen Strand und Shoppen, und
- Julia bei der gewählten Wahrscheinlichkeit, mit der Isra zwischen Strand und Shoppen wählt, den meisten Spaß erwartet mit ihrer eigenen gewählten Wahrscheinlichkeit zwischen Eis und Kuchen.

Um für Abwechslung zu sorgen, machen sie aus, dass sie keine Wahrscheinlichkeiten wählen, die gleich 0 oder 1 sind.

Aufgabe 16. [20 Punkte] Mit welcher Wahrscheinlichkeit wählt Isra den Strand, und mit welcher Wahrscheinlichkeit wählt Julia das Eis?

Thijme und Quinten sind nicht so gute Freunde. Sie finden es besser, einander nicht zu sehen. Leider macht beiden Schwimmen Spaß, aber es gibt nur ein Schwimmbad in der Stadt. Sie versuchen deshalb beide, zu unterschiedlichen Zeiten im Schwimmbad zu sein. Sie müssen morgens schon Tickets für den Nachmittag oder den Abend kaufen, wissen dann aber noch nicht, wann der jeweils andere ins Schwimmbad geht.

Sie haben auch beide ihre Vorlieben, am Nachmittag oder Abend schwimmen zu gehen. Insgesamt gibt diese Bimatrix an, wie glücklich Thijme (linke Zahl) und Quinten (rechte Zahl) sind, wenn sie wissen, wer wann ins Schwimmbad geht.

$$\begin{array}{r c} & \begin{array}{cc}\text{Nachmittag Quinten} & \text{Abend Quinten}\end{array} \\ \begin{array}{r}\text{Nachmittag Thijme} \\ \text{Abend Thijme}\end{array} & \begin{pmatrix} 3;\ 2 & 4;\ 3 \\ 6;\ 3 & 2;\ 1 \end{pmatrix}\end{array}$$

Thijme beurteilt es mit einer 3, wenn er und Quinten beide nachmittags schwimmen gehen, während Quinten diese Situation mit einer 2 beurteilt.

Aufgabe 17. [25 Punkte] Nehmt an, dass Thijme die Strategie $\begin{pmatrix} p & 1-p \end{pmatrix}$ in diesem Spiel spielt und Quinten die Strategie $\begin{pmatrix} q & 1-q \end{pmatrix}$. Zeichnet für beide Spieler die Grafiken in der (p, q)-Ebene, die angeben

- für welche(n) Wert(e) von p die Strategie $\begin{pmatrix} p & 1-p \end{pmatrix}$ von Thijme die beste Reaktion auf die Strategie $\begin{pmatrix} q & 1-q \end{pmatrix}$ von Quinten ist;
- für welche(n) Wert(e) von q die Strategie $\begin{pmatrix} q & 1-q \end{pmatrix}$ von Quinten die beste Reaktion auf die Strategie $\begin{pmatrix} p & 1-p \end{pmatrix}$ von Thijme ist.

Das Schwimmbad merkt, dass abends weniger Menschen schwimmen kommen. Deshalb werden die Abendtickets billiger. Thijme und Quinten passen dadurch ihre Meinungen über das abends Schwimmen an. In der Bimatrix verändern sich nur die Werte, die zu Abend Thijme und Abend Quinten gehören.

$$\begin{array}{r c} & \begin{array}{cc} \text{Nachmittag Quinten} & \text{Abend Quinten} \end{array} \\ \begin{array}{r} \text{Nachmittag Thijme} \\ \text{Abend Thijme} \end{array} & \begin{pmatrix} 3;\,2 & 4;\,3 \\ 6;\,3 & 3;\,3 \end{pmatrix} \end{array}$$

Aufgabe 18. [30 Punkte] Bestimmt die Anzahl von Nash-Gleichgewichten des Spiels mit der oben gegebenen Bimatrix.

A) 0

B) 1

C) 2

D) 3

E) 4

F) Unendlich viele

Achtung: Wenn ihr eine falsche Antwort gebt, bekommt ihr 10 Punkte Abzug. (Der gesamte Score für den ganzen Abschnitt 4 der Aufgaben kann nicht niedriger als 0 sein.)

Wenn ihr keine Antwort gebt, bekommt ihr keine Punkte, aber auch keinen Punktabzug.

5 Carolijn und Renske im Urlaub [30 Punkte]

Carolijn und Renske wollen zusammen in den Urlaub. Sie haben jetzt noch drei verschiedene Optionen: einen Kultururlaub, einen Strandurlaub und einen Aktivurlaub. Sie können bei allen drei Urlauben noch wählen zwischen zwei Ländern und zwei verschiedenen Unterkünften: ein Hotel und ein Bed-and-Breakfast.

Sie wollen gerne die Kosten von jedem dieser Urlaube wissen und vergleichen dafür die Preise der verschiedenen Unterkünfte in den verschiedenen Ländern, die zu einem Kultururlaub, Strandurlaub oder Aktivurlaub passen.

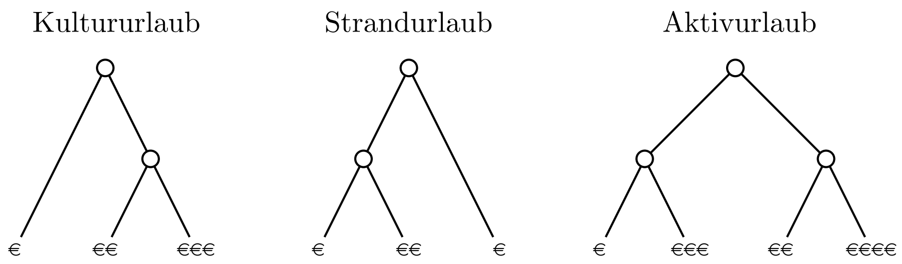
Beim Vergleichen der Ergebnisse stellen sie fest, dass Carolijn alles in drei Bäume gezeichnet hat und Renske alles in drei kurzen Texten aufgeschrieben hat:

A) Wir können sowohl die Unterkunft als auch das Land des Urlaubs noch selbst wählen. Es gibt vier verschiedene Preise für die Urlaube.

B) Wenn wir diesen Urlaub wählen, dann ist in dem einen Land ein Hotel genauso teuer wie ein Bed-and-Breakfast.

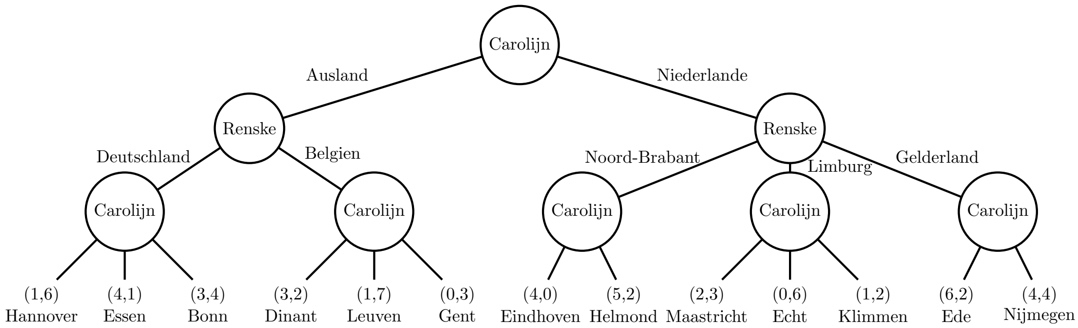
C) Bei diesem Urlaub ist in einem der Länder kein Hotel buchbar. Die Bed-and-Breakfasts sind in beiden Ländern gleich teuer.

Carolijn hat diese drei Bäume gezeichnet:



Aufgabe 19. [10 Punkte] Welcher Text gehört zum Kultururlaub, welcher zum Strandurlaub und welcher zum Aktivurlaub?

Carolijn und Renske haben den Kultururlaub gewählt und inzwischen noch mehr Plätze gefunden, die sie besuchen könnten. Carolijn hat die neue Idee, alle Möglichkeiten in einem Baum aufzuschreiben, und danach versuchen sie gemeinsam, mit rückwärtsgerichteter Induktion die beste Entscheidung zu treffen. Zuerst kann Carolijn zwischen Urlaub in den Niederlanden oder im Ausland wählen, dann entscheidet Renske, welche Provinz sie in den Niederlanden besuchen oder ob sie nach Deutschland oder Belgien gehen, und danach wählt Carolijn die Stadt. Sie haben unabhängig voneinander allen Städten einen Wert gegeben, wobei die linke Zahl im Diagramm der Wert von Carolijn ist und die rechte Zahl der von Renske.



Aufgabe 20. [20 Punkte] An welchen Ort gehen Carolijn und Renske?

6 Im Kino [45 Punkte]

Bram, Lucas und Rik gehen zusammen ins Kino. Sie stehen hintereinander in der Reihe um Karten zu kaufen, aber sie müssen noch zwischen zwei Filmen wählen: Deadpool (D) und Spiderman (S). Bram kauft als erster eine Karte für einen der beiden Filme, danach Lucas und als letzter Rik. Sie können alle drei hören, welche Karte die anderen kaufen. Das können wir als Spiel modellieren.

Bram will gerne Deadpool sehen und bewertet den Film mit 2 Punkten. Lucas will am liebsten Spiderman schauen und bewertet ihn mit 3 Punkten. Rik will am liebsten Deadpool sehen, ihm ist das aber nicht ganz so wichtig wie Bram, deshalb bewertet er den Film mit 1 Punkt. Alle Spieler bewerten mit 0 Punkten einen Film, der nicht ihr Favorit war. Sie finden es aber natürlich schöner, wenn sie zusammen in den Film gehen. Deshalb bewertet jeder Spieler einen Film zusätzlich mit je 1 Punkt für jeden seiner Freunde, der denselben Film wählt.

Aufgabe 21. [30 Punkte] Zeichnet dieses Spiel in extensiver Form. Vergesst nicht, die Namen zu den Linien und Kreisen zu schreiben. Zeichnet Linien, die zu Deadpool gehören, so weit möglich links von Linien, die zu Spiderman gehören.

Aufgabe 22. [15 Punkte] Bestimmt durch rückwärtsgerichtete Induktion, welchen Film Bram, Lucas und Rik schauen.

7 Der Cournot [80 Punkte]

Die Betriebe Big Coin und Dog Coin verkaufen beide eine neue Kryptowährung, den Cournot, mit einigen auffälligen Eigenschaften. Beide Betriebe haben 600 Cournots und kündigen gleichzeitig an, wie viele davon sie verkaufen. Je mehr Cournots verkauft werden, desto niedriger wird der Preis. Wenn Big Coin insgesamt x und Dog Coin y Cournots verkaufen wird, dann ist

$$\text{Gewinn Big Coin} = x \cdot (1200 - x - y),$$
$$\text{Gewinn Dog Coin} = y \cdot (1200 - x - y).$$

In diesem Spiel können beide Spieler Big Coin und Dog Coin aus unendlich vielen verschiedenen Aktionen auswählen: Sie entscheiden beide, wie viel von ihren 600 Cournot sie verkaufen möchten, und dies können auch Bruchteile sein. Dies unterscheidet sich von den im Hintergrundmaterial besprochenen Spielen, bei denen Spieler nur aus einer begrenzten Anzahl von Aktionen auswählen können (zum Beispiel „Stein“, „Papier“ oder „Schere“). Versucht, die Theorie auf dieses Spiel anzuwenden.

Wie bei Spielen mit endlich vielen möglichen Aktionen ist ein reines Nash-Gleichgewicht für dieses Spiel eine Situation, in der beide Spieler jeweils immer die gleiche Aktion ausführen (x für Big Coin und y für Dog Coin) und keiner von ihnen mehr gewinnen könnte, indem er eine andere Aktion spielt.

Aufgabe 23. [20 Punkte] Angenommen, Dog Coin verkauft einen bestimmten Betrag von y Cournot. Wie viele x Cournot sollte Big Coin verkaufen, um den Gewinn zu maximieren? Gebt Eure Antwort in der Form

$$x = a_0 + a_1 y + a_2 y^2 + \cdots + a_n y^n$$

für das kleinstmögliche n und die einfachsten möglichen Brüche $a_1, \ldots, a_n$ an.

Aufgabe 24. [20 Punkte] Findet das reine Nash-Gleichgewicht für dieses Spiel und gebt die Werte von x und y für dieses Gleichgewicht an.

Big Coin hatte die Idee, ihren Gewinn zu vergrößern, indem sie doch früher ankündigen, wie viele Cournots sie verkaufen wollen. Wir spielen dasselbe Spiel wie in der vorherigen Aufgabe, aber Big Coin kann x bestimmen, bevor Dog Coin y wählt. Dog Coin wird mitgeteilt, welche x Big Coin gewählt hat.

Aufgabe 25. [20 Punkte] Angenommen, Big Coin verkauft einen bestimmten Betrag von x Cournot. Angenommen, Dog Coin verkauft eine Anzahl von y Cournot, für die der Gewinn von Dog Coin maximal ist. Gebt den Gewinn von Big Coin als Funktion von x an; stellt diese dar als $a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n$ für das kleinstmögliche n und die einfachsten möglichen Brüche $a_1, \ldots, a_n$.

In der Situation des obigen Problems ist eine Version des Gleichgewichts der rückwärtsgerichteten Induktion eine Kombination aus x und y, für die der Gewinn von Big Coin maximal ist.

Aufgabe 26. [20 Punkte] Bestimmt x und y im Gleichgewicht der rückwärtsgerichteten Induktion.